View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Universidade do Centro Oeste do Paraná (UNICENTRO): Revistas eletrônicas

Modelos físicos y modelos matemáticos

Onofre Rojo[1]

Instituto Politécnico Nacional - CIECAS-PESTyC

04430 México, D. F.

orojo@mail.cmvestav.mx

(*Recebido: 11 de setembro de 2001*)

Resumo: *Se comentan algunos aspectos de los modelos físicos y de los modelos matemáticos como instrumentos predictivos y explicativos en el trabajo científico. Se enfatiza que más que la completitud o la lógica del sentido común es importante que los modelos conduzcan a nuevos descubrimientos*

Palavras-chave: *modelos, modelado matemático, explicación científica, analogías*

Abstract: *Some aspects of the physical and mathematical models related to the predictive or interpretative values in the scientific work are commented. It is emphasised that more than the completeness or the logical interpretation in ordinary language, it is important that a physical model lead to new discoveries.*

Key words: *models, mathematical modelling, scientific explanation, analogies*

---

[1]**S. N. I-CONACyT Becario COFAA**
Colaborador CINVESTAV I. P. N.

> *The Sciences do not try to explain, they hardly try to interpret, they make models. By a model is meant a mathematical construct which, with the addition of certain verbal interpretations, describes observable phenomena. The justification of such mathematical construct is solely and precisely that it is expected to work.*
>
> John von Neumann

La explicación, la interpretación y la descripción en la Ciencia son temas recurrentes, sobre los que los científicos y sobre todo los filósofos de la ciencia, no han podido ponerse de acuerdo, porque tienen diferente significado y corresponden a diferentes niveles epistemológicos, aunque sea frecuente utilizarlas en el lenguaje común de manera indistinta. La explicación "consiste meramente en analizar nuestros sistemas más complicados descomponiéndolos en sistemas más simples, de modo que reconozcamos en los sistemas complicados la intervención y la interacción mutua de elementos ya familiares para nosotros" pero "una explicación completa de algo nunca es posible, pues siempre se llega en un último análisis a algo que no puede ser explicado y que debe aceptarse como un lugar común de la experiencia (BRIDGMAN, 1948, p. 102). La búsqueda de un principio eterno existente, en la base de todas las cosas es un resultado de someter la mente a la exigencia de encontrar explicaciones como si existieran principios que rigen el Universo, independientes de la mente que los enuncia (BRIDGMAN, 1948, p. 108). Tratamos de transferir la lógica propia a una posible lógica del Universo físico, sin querer aceptar, como enfáticamente asegura Feynman que la Naturaleza es absurda.

Si en vez de buscar explicaciones nos conformamos con establecer correspondencias entre representaciones abstractas de los hechos que se producen enmarcadas "dentro de cierto orden, el que sea, pero dispuesto de antemano a entender esto como un caso de aquello" (WARTOFSKY, 2000), estamos interpretando los hechos (objetos o procesos) y podemos "razonar a partir de ellos y lo que es más importante en dirección a ellos" (WARTOFSKY, 2000) que no otra cosa es la explicación.

En este sentido, probablemente, debiera entenderse la afirmación de S. Banach, mencionada por Ulem de que los buenos matemáticos tratan de encontrar "analogies between analogies" ... (SCHWER *et al.*, 2000) ¡y también los físicos! Cuando estamos estableciendo analogías entre analogías estamos trasladando el formalismo de un modelo o estructura de la realidad a otra estructura en cierta manera análoga.

Aunque el concepto de modelo juega un papel cada vez mayor en diferentes campos de la ciencia moderna, no existe una definición general del mismo, pero si se acepta el que las matemáticas juegan un papel muy importante en el modelado de problemas de la más diversa índole, pertenezcan estos a las ciencias naturales o a las ciencias sociales (CARRERA, 1992).

"Modelado matemático es el proceso mediante el cual un problema tal como aparece en el mundo real se interpreta en términos de símbolos abstractos. La descripción abstracta que incluye una formulación matemática se denomina modelo matemático del problema original, ... permitiendo entonces tratar el problema en términos exclusivamente matemáticos." (MURTHY *et al.*, 1990) Es decir, que de acuerdo a esta definición, una vez logrado el modelo matemático, este tiene vida propia y una existencia objetiva en el universo. Esto será ampliado y comentado más adelante, ya que creemos que ello sea la característica fundamental que distingue los modelos físicos de los modelos matemáticos. Este enfoque no se diferencia mucho del de Margenau para quien el mundo real se concibe y abstrae a partir de interpretaciones, correlatos epistémicos, etc., a los que es posible aplicar las matemáticas (MARGENAU, 1970). A él se debe el concepto de constructo como la conexión lógica entre las impresiones de los sentidos. Como hace notar Mitskievich (MITSKIEVICH, 1993), en la realidad física lo estable y fundamental no lo constituyen los objetos concretos (partículas, campos y configuraciones) sino las propias Leyes de la Naturaleza y la posibilidad de expresar estas utilizando medios matemáticos; puede esto considerarse como una base cognitiva del mundo material estando así en una relación directa con lo que Wigner consideró como "inconcebible eficacia de las matemáticas en las Ciencias Naturales" (WIGNER, 1969). Se considera así (MITSKIEVICH, 1993) que la realidad matemática existe junto a la realidad física en el Universo, teniendo ambas objetividad.

Lo que no toma en cuenta Mitskievich es que las estructuras físicas imaginables no son ni aproximadamente tan numerosas ni variadas como las estructuras matemáticas, por lo que podemos encontrar alguna que corresponda mejor con el sistema físico que deseamos estudiar. Por otra parte el uso de todo modelo matemático en la física debe ir acompañado de un "texto", que nos indique el rango de los valores para los que se puede usar, sin rebasar todo significado físico para las ecuaciones involucradas en el modelo. Así en un ejemplo tan simple como la caída libre de un cuerpo, $y = (1/2)gt^2$, nada impide matemáticamente usar $t = 10^{100}$ segundos, aún cuando esos números no tienen ningún sentido físico (BRIDGMAN, 1948, p. 108). El uso del texto, como acompañante de las ecuaciones, es necesario y legítimo correspondiendo a las interpretaciones verbales de Von Neumann.

Para poder plantear matemáticamente cuestiones vinculadas con el mundo físico, se crearon modelos físicos – sustitutos simplificados – susceptibles de tratamiento matemático de los sistemas a los que se referían. Es decir, entre ellos y los sistemas representados debía haber una correspondencia o un isomorfismo entre los dos conjuntos: el de los elementos del modelo físico y los símbolos apropiados a los mismos que permiten su manejo matemático; se comenzaba por idealizar la realidad física para crear el modelo físico y se otorgaban símbolos apropiados a los elementos de dicho modelo (por ejemplo, en la teoría cinética de los gases se hacía corresponder a cada molécula del gas ideal un punto material con ciertas propiedades) con lo que se tenía un modelo matemático. Teníamos entonces una teoría doble, observa Bridgman (BRIDGMAN, 1948, p. 101), "una teoría matemática del modelo ideal y una teoría física que establecía una correspondencia entre el modelo y el sistema físico" ... pero "puesto que todo lo que puede hacerse ... es establecer ciertas correspondencias entre un resultado de las manipulaciones matemáticas y las realizadas con el sistema físico ¿para qué necesitamos la etapa intermedia del modelo físico idealizado ya que una correspondencia de una correspondencia es también una correspondencia?", "según me parece la razón por la cual se tardó tanto tiempo en la Física en adoptar esta posición debe atribuirse al hecho de que no se había comprendido que había un paso intermedio, pues parecía que el modelo ideal era tan semejante al sistema físico, ... que llegaba a identificarse el modelo con el sistema físico". Esto es lo que distingue los modelos matemáticos de los modelos físicos, su emancipación de los modelos mecánicos ideales con lo que se logra que las teorías tengan un mayor poder de análisis de los fenómenos, pues existen muchas más posibilidades en las estructuras matemáticas que en los modelos físicos que podemos imaginar. Sin embargo, el modelo matemático es de difícil "visualización", lo que no sucede con el modelo físico. "Una teoría que utiliza modelos físicos es [...] al mismo tiempo una "explicación" siempre que se puedan encontrar en el sistema físico los elementos correspondientes a aquellos que se han supuesto en el modelo físico ideal."[2]

Todo modelo físico es a la vez que un instrumento de trabajo, "una explicación", imperfecta, incompleta a veces y enteramente inapropiada, pero es al fin una explicación; con los modelos matemáticos las explicaciones desaparecen por completo. "Por ello el físico común desea conservar sus modelos físicos mientras le sea posible", pero cuando una experiencia física de la que tratamos de construir una teoría tiene características tan diferentes de la experiencia física común que no podemos encontrar ninguna correspondencia entre esa experiencia nueva y la experiencia física común, entonces es imposible obtener una explicación en el sentido ordinario del término y se recurre a un modelo matemático que resulta tan satisfactorio a los efectos de predicción y de cálculo, como lo sería recurrir a un modelo físico (BRIDGMAN, 1948, p. 104). Por ejemplo en el átomo, cuando se pierde el significado habitual de espacio, tiempo e identificabilidad, la Mecánica Cuántica nos proporciona un modelo matemático que nos resulta útil para el estudio del campo, aunque nos mostremos renuentes a aceptar que una teoría como la de Dirac, explica, en el sentido que atribuimos a la palabra explicación. "Realmente tuvimos en la Mecánica Cuántica un caso donde el formalismo matemático fue desarrollado bastante completa y exitosamente antes que se encontrase una interpretación en palabras del lenguaje ordinario y que todavía hoy no se ha fijado de forma definitiva (BORN, 1969). Lo que se ha dicho para el átomo se aplica de la misma manera a la Teoría del Campo, Cromodinámica, teoría de supercuerdas, etc. Es decir la justificación del modelo estriba en que "trabaja", aunque no "explique" como hace notar von Neumann. "Su fortaleza estriba en el hecho de que funciona. Quiero decir que no solamente han contribuido a la comprensión de los fenómenos naturales. Sino que han conducido al descubrimiento de otros ..." (BORN, 1969).

No es necesario que todas las operaciones matemáticas de un modelo correspondan a procesos reconocibles en los sistemas físicos y tampoco existe ninguna razón por la cual todos los símbolos, que aparecen en las ecuaciones matemáticas fundamentales, tengan correspondientes físicos, ni hay razón para excluir la intro-

[2] A este respecto resulta ilustrador la declaración de Lord Kelvin "Nunca me siento satisfecho hasta que puedo hallar un modelo mecánico. Si puedo elaborar un modelo mecánico, puedo entenderlo. En la medida en que no puedo elaborar un modelo mecánico a lo largo de todo el proceso, no puedo comprenderlo." [Thomson S. W. (Lord Kelvin). Notes of Lectures on Molecular Dynamics and the Wave Theory of Light, The John Hopkins University, Baltimore, 1884 pp. 270-71.

ducción de cantidades puramente matemáticas creadas para facilitar las operaciones matemáticas. Por ejemplo, en la teoría de la elasticidad se introduce la cantidad tensión interior que jamás se mide, sino que se construye a partir de las constantes elásticas, de las fuerzas en la superficie y otros datos que si se miden, y que resulta útil, pues a partir de ella se pueden calcular fácilmente las fuerzas que actúan a través de las superficies libres del sólido. Otro tanto podría argüirse en torno de la función de onda de la Mecánica Cuántica o de la Función de Distribución de la Mecánica Estadística.

Regresando a la afirmación de von Neumann establecida al inicio, podríamos pensar que la ciencia intenta ordenar los hechos observados, representarlos de forma coherente y sistemática dentro de la estructura articulada de cierto lenguaje; por lo tanto una parte de la Ciencia comienza allí donde las observaciones dejan de actuar y otra parte se ocupa de lo que sucede antes de que se empiecen a hacer observaciones (WARTOFSKY, 2000), ya que estas, por lo general, no son totalmente inocentes (excepto en Serendipia) y están sugeridas por un propósito o teoría previa buscando patrones que revelen relaciones entre los datos.

El medio de que se vale esta actividad intelectual de razonar a "partir de los datos" o en "dirección a los datos" consiste en la representación de los hechos en una construcción abstracta (efectuado en cierto lenguaje, dentro del cual se hagan explícitas las relaciones existentes entre los hechos y se pueda expresar la forma de tales relaciones; se convierte en un medio de operar con las representaciones de los hechos en lugar de hacerlo con los hechos mismos: "la aludida representación es un mapa sobre el que se plantean las campañas e incursiones de la ciencia, estas se llevan a cabo imaginariamente y luego se someten a contraste" (WARTOFSKY, 2000).

De acuerdo a este enfoque, el modelo se entiende como la representación abstracta de las estructuras formales sacada a la luz del dominio proyectado o modelado; es una versión derivada o representativa de algo que se toma como el original. Pero podríamos invertir el enfoque y, yendo hacia el platonismo o los pitagóricos, pensar que bajo la apariencia perceptiva de las cosas se encuentran las estructuras matemáticas, de las cuales el mundo perceptivo es una proyección a modo de mapa o modelo y tendríamos que el mundo de los hechos o mundo concreto de nuestra percepción es una representación de las formas o estructuras matemáticas en lugar de considerar estas como representación abstracta del mundo, lo que pareciera no quedar muy lejos de la afirmación de "[la] experiencia nos autoriza a creer que la naturaleza es la realización de las ideas matemáticas más simples que se pueda concebir".

Un politólogo mexicano afirmaba que "en política la forma es el fondo" y trasladándose de la política a la Ciencia, este enfoque platónico-pitagórico nos llevaría a afirmar "en ciencia las formas o estructuras formales son los hechos o mundo concreto de nuestra percepción". Sin subscribirnos a tal filosofía la dejamos como materia de reflexión.

La metodología formalística considera, de acuerdo a Tarski (TARSKI, 1953), "una realización posible en la que todas las sentencias válidas de una teoría T se satisfacen se denomina un modelo de T", que no excluye sino complementa las anteriores (SUPPES, 1961).

Sin tratar de justificar los modelos en su análisis sistemático, ni óntico, consideramos que la definición que proporciona J. Carrera (CARRERA, 1992, pp. 19-28) se adapta bastante bien a la propuesta de von Neumann. Para Carrera, un modelo físico, económico, biológico, lingüístico, etc. es un sistema con las siguientes propiedades:

a) es consistente como sistema matemático;

b) es directamente interpretable en términos de un sistema real;

c) su "input" debiera estar basado (directa o indirectamente) en datos del mundo real; y

d) su "output" también puede ser interpretado como información acerca del sistema real.

En este esquema de Carrera, el modelo matemático constituye un sistema de relaciones (matemáticas) las que denomina modelos fuente, y aunque todavía próximos a la realidad, los conceptos tienen sentido matemático en si mismos. "El comportamiento del sistema se reproduce en un espacio-símbolo por medio del modelo y que debe interpretarse para ser útil" (SEVINC, 1991). Decimos de dos sistemas R y S que uno es modelo del otro si para la misma entrada ("input") de cierto subconjunto preseleccionado de un espacio V se obtiene la misma salida ("output"); por otra parte se dice que cierta familia $\{S_\theta\}$ de sistemas son aproximantes de R si en cierto límite $\theta \to \lambda$, S_θ es igual o isomorfo a R. El "output" del sistema matemático es su solución matemática, es decir aquellos elementos de su dominio de definición tales que cuando se identifiquen las variables libres, se satisfagan todas las ecuaciones o desigualdades pertinentes.

Ahora bien en ocasiones la solución matemática conduce a la consecución de un esquema de cómputo, obteniéndose entonces un modelo (aproximado) computacional, con lo que el algoritmo así obtenido podría considerarse como el modelo.

Referencias

BORN, M. *Symbol and Reality in Physics in my Generation.* New York: Longman-Springer Verlag, 1969. pp. 132-146.

BRIDGMAN, P. W. *La Naturaleza de la Teoría Física.* Buenos Aires: Ibero-Americana, 1948. p. 102.

CARRERA, J. Methodological Conceptualization of Mathematical Modelling. *Mathl. Comput. Modelling*, v. 16, n. 12, pp. 19-26, 1992.

MARGENAU, H. *La Naturaleza de la Realidad Física.* Madrid: Tecnos, 1970.

MITSKIEVICH, N. *La Tercera Ley de Newton y la Autoconsistencia de las Interacciones Físicas.* México: Claro-Obscuro, I.P.N., n. 3, 1993.

MURTHY, D. N. P.; PAGE, N. W.; RODIN, E. T. *Mathematical Modelling.* Oxford: Pergamon Press, 1990. *apud* CARRERA, 1992.

SCHWER, S.; WÄCHTER, M. *Stud. Hist. Phil. Mod. Phys.* v. 31, n. 4, p. 583, 2000.

SEVINC, S. Automation of simplification in discrete even modelling. *Int. J. General Systems*, v. 18, n. 2, pp. 125-142, 1991.

SUPPES, P. A comparison of the meaning and uses of models in mathematical and empirical sciences, en *The Concept and the Role of the Model in Mathematics and Natural Sciences*. Dordrecht: D. Reidel Publ., 1961. pp. 163-177.

TARSKI, A. A. A general method in proofs of undecility. In: *Undecidable Theories.* Dordrecht: D. Reidel Publ., 1953.

WARTOFSKY, M. Sistemas Formales, Modelos y Representación de los Hechos. In: *Introducción a la Filosofía de las Ciencias*. Madrid: Alianza Editorial. 1978.

WIGNER, E. *Comun. Pure and Applied Math.* v. 13, p. 1, 1969.